Vježbe 3

1. (Zadatak 5 sa prvog domaćeg zadatka) Posmatrajte binarni simetrični kanal, gdje je vjerovatnoća pojavljivanja 1 jednaka p i vjerovatnoća greške pri prenosu simbola kroz kanal jednaka P. Kolika je entropija sistema na ulazu, a kolika na izlazu? Kolika je međusobna informacija stanja na ulazu i izlazu? Kolike su odgovarajuće uslovne entropije?

Rješenje:

Uslov zadatka je:
$p(X=1)=p$.

Imajući u vidu da je u pitanju simetrični binarni kanal, zaključujemo da je:
$p(X=0)=1-p$, pa je entropija na ulazu:

$$H(X)=-\sum_{i=1}^{N}p(x_i)\log p(x_i)=-p\log p-(1-p)\log(1-p)\ .$$

Na izlazu se pojavljuje 1 u dvije situacije: kada je poslata 1 i nije napravljena greška prilikom prenosa, kao i kada je poslata 0 i učinjena je greška prilikom prenosa, odnosno:

$$P_1=p(1-P)+(1-p)P=p-pP+P-pP=p-2pP+P\ .$$

Analogno, na izlazu se pojavljuje 0 u dvije situacije: kada je poslata 0 i nije napravljena greška prilikom prenosa, kao i kada je poslata 1 i učinjena je greška prilikom prenosa, odnosno:

$$P_0=(1-p)(1-P)+pP=1-P-p+2pP\ .$$

Entropija na izlazu je stoga:

$$\begin{aligned}H(Y)&=-\sum_{i=1}^{N}p(y_i)\log p(y_i)=-P_1\log P_1-P_0\log P_0=\\&=-(p-2pP+P)\log(p-2pP+P)-(1-P-p+2pP)\log(1-P-p+2pP).\end{aligned}$$

Uslovna entropija je definisana na sljedeći način:

$$\begin{aligned}H(Y\,|\,X)&=-\sum_{x\in A}\sum_{y\in B}p(x,y)\log p(y\,|\,x)=\\&=-\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}p(x_i,y_j)\log p(y_j\,|\,x_i)=-\sum_{i=1}^{2}[p(x_i,y=0)\log p(y=0\,|\,x_i)+p(x_i,y=1)\log p(y=1\,|\,x_i)]=\\&=-[p(x=0,y=0)\log p(y=0\,|\,x=0)+p(x=0,y=1)\log p(y=1\,|\,x=0)]-\\&\quad-[p(x=1,y=0)\log p(y=0\,|\,x=1)+p(x=1,y=1)\log p(y=1\,|\,x=1)]=\\&=-(1-p)(1-P)\log(1-P)-(1-p)P\log P-pP\log P-p(1-P)\log(1-P)=\\&=-[(1-p)+p](1-P)\log(1-P)-[(1-p)+p]P\log P=\\&=-(1-P)\log(1-P)-P\log P.\end{aligned}$$

Međusobna informacija je definisana na sljedeći način:

$$I(X,Y)=H(Y)-H(Y\,|\,X)=$$
$$=-(p-2pP+P)\log(p-2pP+P)-(1-P-p+2pP)\log(1-P-p+2pP)+$$
$$+(1-P)\log(1-P)+P\log P.$$

Združena entropija je:
$$H(X,Y)=H(X)+H(Y\,|\,X)=-p\log p-(1-p)\log(1-p)-(1-P)\log(1-P)-P\log P.$$

Druga uslovna entropija je:
$$H(X\,|\,Y)=H(X,Y)-H(Y)=-p\log p-(1-p)\log(1-p)-(1-P)\log(1-P)-P\log P+$$
$$+(p-2pP+P)\log(p-2pP+P)+(1-P-p+2pP)\log(1-P-p+2pP).$$

2. (Zadatak 7 sa prvog domaćeg zadatka) Neka su vjerovatnoće simbola ¼ i ¾. Kolika je entropija ovog sistema? Kolika je entropija sistema kod kojeg se šalju kombinacije od po dva simbola sa datim vjerovatnoćama ako su simboli međusobno nezavisni? Ponoviti proceduru za tri nezavisna simbola. Koliku entropiju očekujete kod *n* nezavisnih ponavljanja simbola po istim pravilima?

Rješenje:

Prema definiciji, entropija događaja je jednaka:
$$H(X)=-\sum_{i=1}^{N}p(x_i)\log p(x_i)=-\frac{1}{4}\log\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\log\frac{3}{4}=0.8113\,.$$

Postoje ukupno 4 različite kombinacije pojavljivanja dva simbola (npr. 0 i 1) kao združenog događaja, i one se javljaju sa sljedećim vjerovatnoćama:
1/16 (00), 3/16 (01), 3/16 (10) i 9/16 (11).

Entopija ovog združenog događaja je:
$$H_2(X)=-\sum_{i=1}^{N}p(x_i)\log p(x_i)=-\frac{1}{16}\log\frac{1}{16}-\frac{3}{16}\log\frac{3}{16}-\frac{3}{16}\log\frac{3}{16}-\frac{9}{16}\log\frac{9}{16}=1.6626.$$

Ako imamo 3 simbola, postojaće ukupno 8 različitih kombinacija, sa sljedećim vjerovatnoćama:
1/64 (000), 3/64 (001), 3/64 (010), 9/64 (011), 3/64 (100), 9/64 (101), 9/64 (110) i 27/64 (111).

Entopija ovog združenog događaja je:
$$H_3(X)=-\sum_{i=1}^{N}p(x_i)\log p(x_i)=-\frac{1}{64}\log\frac{1}{64}-3*\frac{3}{64}\log\frac{3}{64}-3*\frac{9}{64}\log\frac{9}{64}-\frac{27}{64}\log\frac{9}{64}=2.4338.$$

Uočimo, na osnovu dobijenih rezultata, da je:
$H_2(X)=2H(X)$, kao i $H_3(X)=3H(X)$.
Zaključujemo da će biti $H_n(X)=nH(X)$.
Naime, entropija združenog događaja je: $H(X,Y)=H(X)+H(Y|X)$. Pošto je riječ od dva nezavisna događaja, $H(Y)=H(Y|X)$, odnosno $H(X,Y)=H(X)+H(Y)$. S obzirom da je u posmatranom slučaju $H(X)=H(Y)$, to je lako zaključiti da je $H(X,Y)=2H(X)$.

3. a) Napisati 3-bitni Grejov kod.
   b) Koji dekadni broj je predstavljen Grejovim kodom: 110101?

Rješenje:

a)

	Binarni zapis	Grejov kod
0	000	000
1	001	001
2	010	011
3	011	010
4	100	110
5	101	111
6	110	101
7	111	100

Obratite pažnju na to da se svaka uzastopna kodna riječ u Grejovom kodu razlikuje u tačno jednom bitu.

b)

$$\begin{array}{lccccccccccc}
\textbf{Grejov kod} & \mathbf{1} & & \mathbf{1} & & \mathbf{0} & & \mathbf{1} & & \mathbf{0} & & \mathbf{1} \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\textbf{Binarni broj} & \mathbf{1} & \rightarrow & \mathbf{0} & \rightarrow & \mathbf{0} & \rightarrow & \mathbf{1} & \rightarrow & \mathbf{1} & \rightarrow & \mathbf{0}
\end{array}$$

Odnosno, $100110_{(2)}=38_{(10)}$.